

Оглавление

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
Введение	5
§ 1. Предмет курса	5
§ 2. Некоторые определения и обозначения	9
Глава 1. Интегралы, зависящие от параметра	13
§ 1. Равномерно сходящиеся интегралы	13
§ 2. Сферические координаты	15
§ 3. Интегральные операторы со слабой особенностью	19
§ 4. Интегральные операторы со слабой особенностью (продолжение)	26
Глава 2. Средние функции и обобщенные производные	29
§ 1. Усредняющее ядро	29
§ 2. Средние функции	30
§ 3. Понятие обобщенной производной	33
§ 4. Простейшие свойства обобщенной производной	37
§ 5. Предельные свойства обобщенных производных	39
§ 6. Случай одной независимой переменной	40
§ 7. Об одном свойстве функций, имеющих обобщенную первую производную	41
§ 8. Производные от интегралов со слабой особенностью	43
Глава 3. Пространства функций с обобщенными производными	44
§ 1. Определение пространства $W_p^{(k)}$	44
§ 2. Соболевское интегральное тождество	46
§ 3. Теоремы вложения	49
§ 4. Распространение на более общие области	52
§ 5. Эквивалентные нормы в соболевских пространствах	53
§ 6. Неравенства Фридрихса и Пуанкаре	55
Глава 4. Положительно определенные операторы	59
§ 1. Квадратичные функционалы	59
§ 2. Положительно определенные операторы	60
§ 3. Энергетическое пространство	64
§ 4. Функционал энергии и задача о его минимуме	70
§ 5. Обобщенное решение	72
§ 6. О сепарабельности энергетического пространства	75
§ 7. Расширение положительно определенного оператора	77
§ 8. Простейшая краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального оператора	80
§ 9. Более общая задача о минимуме квадратичного функционала	86
§ 10. Случай только положительного оператора	88
Глава 5. Собственный спектр положительно определенного оператора	89
§ 1. Понятие о собственном спектре оператора	89
§ 2. Собственные числа и собственные элементы симметричного оператора	90
§ 3. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора	91
§ 4. Вариационная формулировка задачи о собственном спектре	93

	<i>Стр.</i>
§ 5. Теорема о наименьшем собственном числе	96
§ 6. Теорема о дискретности спектра	98
§ 7. Разложение по собственному спектру положительно определен- ного оператора	101
§ 8. Задача Штурма—Лиувилля	101
§ 9. Элементарные случаи	105
§ 10. Минимаксимальный принцип	109
§ 11. О росте собственных чисел задачи Штурма—Лиувилля	112
Глава 6. Уравнения в банаховых пространствах и одномерные сингу- лярные уравнения	114
§ 1. Некоторые понятия	114
§ 2. Теоремы Нетера	115
§ 3. Теоремы об устойчивости индекса	117
§ 4. Символ	120
§ 5. Сингулярный интеграл Коши	122
§ 6. Оператор Коши в пространстве $L_2(\Gamma)$	126
§ 7. Символ и регуляризация сингулярного оператора	131
§ 8. Вычисление индекса сингулярного оператора	132
Глава 7. Элементы теории многомерных сингулярных интегралов	135
§ 1. Преобразование Фурье	135
§ 2. Определение и условия существования сингулярного интеграла	140
§ 3. Теорема Жиро	142
§ 4. Преобразование Фурье сингулярного ядра	146
§ 5. Сингулярные интегралы в L_2	150
§ 6. О дифференцировании интегралов со слабой особенностью	154
Глава 8. Уравнения и краевые задачи	157
§ 1. Дифференциальное выражение и дифференциальное уравнение	157
§ 2. Классификация уравнений второго порядка	159
§ 3. Краевые условия и краевые задачи	163
§ 4. Задача Коши	166
§ 5. Проблемы существования, единственности и корректности для краевой задачи	169
Глава 9. Характеристики. Канонический вид. Формулы Грина	174
§ 1. Преобразование независимых переменных	174
§ 2. Характеристики. Соотношение между данными Коши на харак- теристике	175
§ 3. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду	178
§ 4. Формально сопряженные дифференциальные выражения	179
§ 5. Дифференциальные выражения высших порядков	180
§ 6. Формулы Грина	180
Глава 10. Обобщенные решения дифференциальных уравнений	185
§ 1. Локально суммируемые обобщенные решения	185
§ 2. Распределения и обобщенные функции	187
§ 3. Обобщенные функции конечного порядка	189
§ 4. Решения из класса обобщенных функций. Сингулярные реше- ния	190
§ 5. Сингулярное решение уравнения Лапласа	190
§ 6. Сингулярное решение уравнения теплопроводности	194
§ 7. Сингулярное решение волнового уравнения	196
Глава 11. Уравнение Лапласа и гармонические функции	199
§ 1. Основные понятия	199
§ 2. Замена переменных в операторе Лапласа	200
§ 3. Интегральное представление функций класса $C^{(2)}$ и гармониче- ских функций	205

	<i>Стр.</i>
§ 4. Понятие о потенциалах	207
§ 5. Свойства объемного потенциала	209
§ 6. Теоремы о среднем	212
§ 7. Принцип максимума	214
§ 8. Подпространства гармонических функций	216
Глава 12. Задачи Дирихле и Неймана	220
§ 1. Постановка задач	220
§ 2. Теоремы единственности для уравнения Лапласа	221
§ 3. Решение задачи Дирихле для шара	225
§ 4. Теорема Лиувилля	230
§ 5. Задача Дирихле для внешности сферы	231
§ 6. Производные гармонической функции на бесконечности	232
§ 7. Устранимые особенности гармонических функций	233
Глава 13. Сферические функции	235
§ 1. Понятие о сферических функциях	235
§ 2. Дифференциальное уравнение сферических функций	238
§ 3. Вспомогательные построения и утверждения	239
§ 4. Оператор δ и его степени. Ортогональность сферических функций	241
§ 5. Разложение сингулярного решения в ряд полиномов	242
§ 6. Интегральное уравнение сферических функций	246
§ 7. Полнота системы сферических функций	248
Глава 14. Теория потенциала	251
§ 1. Поверхности Ляпунова	251
§ 2. Телесный угол	253
§ 3. Прямое значение потенциала двойного слоя	258
§ 4. Интеграл Гаусса	259
§ 5. Предельные значения потенциала двойного слоя	261
§ 6. Непрерывность потенциала простого слоя	264
§ 7. Нормальная производная потенциала простого слоя	266
Глава 15. Интегральные уравнения теории потенциала	271
§ 1. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям	271
§ 2. Задачи Дирихле и Неймана для полупространства	273
§ 3. Исследование первой пары сопряженных уравнений	274
§ 4. Исследование второй пары сопряженных уравнений	276
§ 5. Решение внешней задачи Дирихле	278
§ 6. Случай двух независимых переменных	280
§ 7. Уравнения теории потенциала для круга	284
Глава 16. Задача о косо́й производной	287
§ 1. Постановка задачи	287
§ 2. Случай двух переменных. Индекс задачи	288
§ 3. О непрерывности решений	290
§ 4. Более простой случай задачи о косо́й производной	291
§ 5. Случай многих переменных	295
Глава 17. Вариационный метод. Слабые решения	297
§ 1. Задача Дирихле с однородным краевым условием	297
§ 2. Энергетическое пространство задачи Дирихле	302
§ 3. Задача Дирихле для однородного уравнения	306
§ 4. Вторые производные слабого решения уравнения Лапласа	307
§ 5. Об условии продолжимости	309
§ 6. Функция Грина	312
§ 7. Задача Неймана с однородным краевым условием	317

	<i>Стр.</i>
§ 8. Задача Неймана с неоднородным краевым условием	321
§ 9. Эллиптические уравнения высших порядков; системы уравнений	324
§ 10. Задача Дирихле для бесконечной области	327
Глава 18. Спектр задач Дирихле и Неймана	329
§ 1. Об одной теореме вложения	329
§ 2. Спектр задачи Дирихле для конечной области	330
§ 3. Элементарные случаи	331
§ 4. Оценка роста собственных чисел	333
§ 5. Спектр задачи Неймана для конечной области	336
§ 6. О несамосопряженных уравнениях	337
§ 7. Задачи Дирихле и Неймана для несамосопряженного эллиптического уравнения	340
Глава 19. Сильные решения	342
§ 1. Решение уравнения Лапласа для параллелепипеда	342
§ 2. Умножение слабого решения на гладкую функцию	345
§ 3. Сильные решения в произвольной области	346
§ 4. Неоднородные краевые условия	351
§ 5. Случай достаточно гладкой границы	352
Глава 20. Уравнение теплопроводности	354
§ 1. Уравнение теплопроводности и его характеристики	354
§ 2. Принцип максимума	356
§ 3. Задача Коши и смешанная задача	358
§ 4. Теоремы единственности	358
§ 5. Абстрактные функции вещественной переменной	360
§ 6. Слабое решение смешанной задачи	361
Глава 21. Волновое уравнение	363
§ 1. Понятие о волновом уравнении	363
§ 2. Смешанная задача и ее слабое решение	364
§ 3. Волновое уравнение с постоянными коэффициентами. Задача Коши. Характеристический конус	366
§ 4. Теорема единственности для задачи Коши. Область зависимости	367
§ 5. Явление распространения волн	369
Глава 22. Метод Фурье	371
§ 1. Метод Фурье для уравнения теплопроводности	371
§ 2. Обоснование метода Фурье	372
§ 3. О корректности смешанной задачи для уравнения теплопроводности	376
§ 4. О стабилизации решения	377
§ 5. О существовании классического решения	379
§ 6. Случай несамосопряженной эллиптической части	381
§ 7. Метод Фурье для волнового уравнения	385
§ 8. Обоснование метода для однородного уравнения	387
§ 9. Обоснование метода для однородных начальных условий	390
§ 10. Уравнение колебаний струны. Условия существования классического решения	392
Глава 23. Задача Коши для уравнения теплопроводности	394
§ 1. Формула Пуассона	394
§ 2. Другой вывод формулы Пуассона	397
§ 3. Обоснование формулы Пуассона	400
§ 4. Бесконечная скорость теплопередачи	404
Глава 24. Задача Коши для волнового уравнения	405
§ 1. Применение преобразования Фурье	405
§ 2. Применение сингулярного решения	407

	<i>Стр.</i>
§ 3. Случай нечетного числа координат. Обобщенная формула Кирхгофа	410
§ 4. Задний фронт волны	413
§ 5. Обоснование формулы Кирхгофа	414
§ 6. Случай четного числа координат	417
§ 7. Уравнение колебаний струны	419
§ 8. О корректности задачи Коши	420
Литература	421
Алфавитный указатель	423